طوفان بال پروانه

نازنین حسن‌نیا
عکاس: شادی رضائی

آیا با بال زدن پروانه‌ای، طوفان می‌شود؟

دنیای ما با تمام سادگی‌اش پر از عجایب است و یکی از عجیب‌ترین چیزهایی که در سال‌های اخیر زیاد شنیده‌ایم، این داستان است: «بال زدن پروانه‌ای در برزیل می‌تواند باعث ایجاد طوفان در تگزاس شود» به نظر می‌رسد خیلی عجیب باشد. آیا واقعاً چنین چیزی ممکن است؟ این دو مکان و این دو اتفاق چه ربطی به‌هم دارند؟ حالا اگر هم چنین اتفاقی ممکن باشد، کدام‌یک از دانش‌های کنونی می‌تواند این پدیده را توضیح دهد؟ کار زیست‌شناس‌ها است یا کار جغرافی‌دان‌ها؟ شاید هم دانشمندان هواشناسی باید به ما پاسخ بدهند؟ احتمالاً به فکر شما نرسیده است که ریاضی‌دان‌ها هم می‌توانند به سؤال ما پاسخ بدهند. برای همین با آقای دکتر نصیری که در موضوع سیستم‌های دینامیکی کار می‌کند و آقای دکتر صفدری که زمینهٔ کارشان معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است، به گفت‌وگو نشستیم. شما هم با ما همراه شوید.

معادلات دیفرانسیل چیست؟

نصیری: بعضی از مسائل فیزیک و مهندسی تغییر یک پدیده را بررسی می‌کنند؛ مانند حرکت اجسام، انتقال گرما، جاری شدن مایعات و ... برای حل این مسئله‌ها به نوع خاصی از معادله‌ها نیاز داریم که به آن‌ها **معادلات دیفرانسیل** می‌گویند. جواب این معادله‌ها فقط یک یا چند عدد نیست. کار من، حل کردن این معادلات است. مثلاً منظومه شمسی الان در یک وضعیت مشخصی است. یعنی خورشید و سیارات و هر جسم دیگری که در این منظومه هستند، مدار و سرعت مشخصی دارند. آیا ممکن است بعضی از سیارات به سمت خورشید بروند یا حتی با آن برخورد کنند؟ یا بعضی دیگر از منظومه شمسی بیرون بروند؟ البته ما برای یک یا دو یا حتی هزار سال دیگر هم می‌دانیم که منظومهٔ شمسی تقریباً به همین شکل امروزی خواهد بود. حالا اگر بخواهیم یک میلیون سال دیگر را پیش‌بینی کنیم، باید با معادلات دیفرانسیل مسئله را حل کنیم. اجسام منظومه شمسی یکدیگر را جذب می‌کنند و نیروی جاذبهٔ بین آن‌ها براساس قانون جاذبهٔ نیوتن، به فاصلهٔ آن‌ها از هم، بستگی دارد. این فاصله‌ها با گذشت زمان تغییر می‌کند، پس نیروی جاذبهٔ بین این اجسام مُدام در حال تغییر است. همهٔ تغییرات منظومه به گذر زمان بستگی دارد. زمان در اینجا یک متغیر است. پس معادله‌های این مسئله باید به‌صورت معادله‌ای وابسته به زمان باشد. اگر بخواهیم معادلات همهٔ این تغییرات را بنویسیم، معادله‌های بسیار پیچیده‌ای به‌دست می‌آید. اما حدود یک صد و سی سال پیش، ریاضی‌دان فرانسوی، هانری پوانکاره[1]، راه دیگری را در پیش گرفت که منجر به شکل‌گیری رشتهٔ سیستم‌های دینامیکی شد. ایدهٔ او این بود که بدون دانستن فرمول جواب معادله و فقط از خود معادله، ویژگی‌های جواب‌های آن را کشف و بررسی کنیم و از این طریق به سؤالاتمان پاسخ دهیم.

صفدری: من هم روی گروه خاصی از معادله‌های دیفرانسیل کار می‌کنم که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نام دارند.

آشوب پروانه‌ای

نصیری: در معادلات دیفرانسیل نوع اول، یکی از ویژگی‌های جواب که خیلی برای ما مهم است،

دکتر میثم نصیری
دکتر محمد صفدری

پایداری جواب است، به این معنی که اگر در دو آزمایش، شرایط اولیه خیلی به هم شبیه بود، آیا در نهایت جواب‌ها هم به هم شبیه هستند؟ با همان مثال منظومهٔ شمسی توضیح می‌دهم. اگر محل کرهٔ زمین را چند سانتی‌متر از مدارش خارج کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا در آینده مسیر حرکتش به دور خورشید تغییر جدی می‌کند؟ مثال دیگر وضعیت آب و هوا است که دما، درصد رطوبت، وضعیت باد، حرکت و سرعت فعلی ابر، محل فعلی خورشید و ... بر آن اثر می‌گذارند. فرض کنید مسئلهٔ آب و هوا را به معادلهٔ دیفرانسیل عادی تبدیل کردیم که اگر وضعیت فعلی آب و هوا را در معادله قرار دهیم، وضعیت آینده را به ما بدهد. واقعیت این است که معادلات آب و هوا آن‌قدر به وضعیت اولیه حساس هستند که کوچک‌ترین تغییری در مقدارهای اولیه، نتیجه را بعد از چند ساعت تغییر می‌دهد. مثلاً یک هزارم درجه خطای اندازه‌گیری در دمای امروز، ممکن است باعث شود دمای سه روز بعد را بیش از ۱۰ درجه متفاوت اعلام کند همین است که آب‌وهوا را برای طولانی مدت نمی‌توان پیش‌بینی کرد. به همین دلیل به این نوع معادلات، معادلات آشوبناک می‌گوییم. اثر معروف پروانه‌ای به همین موضوع اشاره دارد. اگر پروانه‌ای در برزیل بال بزند، اثر بسیار کوچکی بر جریان هوای آن منطقه می‌گذارد. اما به علت ویژگی حساس بودن (یا آشوبناک بودن) معادلات آب و هوا، همین تغییر بسیار کوچک می‌تواند پس از چند هفته، تغییر بسیار عظیمی در هوای کرهٔ زمین مثلاً در یک سرزمین بسیار دور ایجاد کند.

معادلهٔ دیفرانسیل

معادله‌ای است که نشان می‌دهد مقدار یک متغیر، با تغییرات متغیرهای دیگر چه ارتباطی دارد. اگر در یک مسئله تنها یک متغیر باعث تغییر شود، به معادلات مربوط به آن، معادلات دیفرانسیل نوع اول یا عادی می‌گوییم. اما در بعضی مسئله‌ها چند متغیر اثرگذار وجود دارد و تغییر هر کدام از این متغیرها، بر آن اتفاق یا پدیده اثر دارد. معادلاتی که در این مسئله‌ها ظاهر می‌شوند، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نام دارند. این دو نوع معادله خیلی باهم فرق دارد. وقتی یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی داریم، فقط یک متغیر مستقل هست که بر بقیهٔ متغیرها اثر می‌گذارد. سال‌ها پیش اثبات شده است که این نوع معادله‌ها همیشه جواب دارند.

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

صفدری: جالب اینجاست که وقتی از معادلات دیفرانسیل یک متغیره به معادلات دیفرانسیل دو متغیره یا بیشتر می‌رویم، کاملاً وارد یک دنیای دیگری می‌شویم. حل این معادلات دیفرانسیل به کلی متفاوت از معادلاتی است که دکتر نصیری گفتند و ما حتی نمی‌دانیم که این معادلات جواب دارند یا خیر. برای هر معادلهٔ دیفرانسیلِ پاره‌ای، ما باید به سه سؤال مهم جواب دهیم: ۱- آیا جوابی برای این معادله وجود دارد یا نه؟ ۲- اگر جوابی هست، آیا یکتاست، یعنی آیا فقط یک جواب برای این مسئله هست یا جواب‌های متعدد دارد؟ ۳- ویژگی جواب چیست؟

تفاوت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با معادلات دیفرانسیل عادی در چیست؟

صفدری: با یک مثال توضیح می‌دهم. یک لیوان آب روی میز می‌ریزیم. اگر دقیقاً همین کار را یک‌بار دیگر تکرار کنید، پخشِ شدن آب روی سطح میز قابل پیش‌بینی نیست و این‌بار آب کاملاً متفاوت با دفعهٔ قبل پخش می‌شود. به همین دلیل حل معادلات پخش آب بسیار سخت است و اصلاً نمی‌دانیم که آیا جوابی هموار برای این معادلات وجود دارد یا نه.

نصیری: در مسئلهٔ پخش شدن آب به‌جز زمان چه متغیرهای دیگری اثرگذار هستند؟

صفدری: چگالی، سرعت و فشار مایع، که در همهٔ نقاط مایعی که در حال پخش شدن است، یکسان نیست. ما مایع را به‌صورت قسمت‌های خیلی کوچک درنظر می‌گیریم که هر قسمت، سرعت و فشار خودش را دارد. قوانین فیزیکیِ حرکت مایعات، همانند قوانین مکانیک نیوتنی که شما گفتید، سال‌ها پیش به‌دست آمده است. فکر می‌کنم اولین معادلات را حدود ۲۵۰ سال قبل، اویلر[۲] نوشت. فرم نهایی این معادلات که معروف به معادلات ناویه- استوکس[۳] هست حدود ۲۰۰ سال پیش نوشته شده است. ولی وجود جواب هموار برای آن هنوز ثابت نشده است. این مسئله یکی از هفت مسئلهٔ مهم و حل نشده در ریاضیات است که در سال ۲۰۰۰ برای حل آن جایزهٔ یک میلیون دلاری گذاشته شده است.

معادلات دیفرانسیل، ریاضیات کاربردی یا ریاضیات محض؟

برهان: به نظر می‌رسد که کار شما استفاده از ریاضی در علوم دیگر است. آیا می‌شود گفت که این نوع ریاضیات، ریاضیات کاربردی است؟ چه‌مقدار با دانشمندان علوم دیگر در ارتباط هستید و همکاری دارید؟

صفدری: این کارها را بعضی ریاضیات کاربردی و بعضی ریاضیاتِ محض می‌دانند. در واقع خیلی کم پیش می‌آید که ما با رشته‌های دیگر وارد تعامل شویم.

نصیری: معادلات نَویِر- استوکس ۲۰۰ سال قبل با همکاری ریاضی‌دان‌ها و فیزیکدان‌ها به‌دست آمده، ولی الان ۲۰۰ سال است

ریاضی‌دانان دارند این معادله را مدام دست‌کاری می‌کنند که قابل حل شود. با تئوری‌پردازی آن‌ها نظریه‌هایی در ریاضی شکل می‌گیرد. دغدغهٔ ریاضی‌دانان امروز حل این معادله است و دیگر کاری به اینکه معادله از کجا آمده است ندارند. بعضی از مسئله‌های ما هم از خودِ دنیای ریاضی پیدا می‌شود که اصلاً ربطی به اتفاق‌های واقعی و طبیعی ندارد.

برهان: ممکن است مثلاً از دانشکدهٔ فیزیک بیایند با شما مسئله‌ای طرح کنند و شما آن را تبدیل به یک مسئلهٔ ریاضی کنید و به حل آن بپردازید؟

نصیری: خیر. اینکه یک مسئلهٔ واقعی، تبدیل به یک مسئلهٔ ریاضی شود، کارِ ما نیست. افرادی در رشته‌های دیگر یا بعضی افراد که کارهای بین رشته‌ای انجام می‌دهند، معادلات را می‌سازند و کار ما تنها بررسی و حل معادلاتی است که افراد دیگر به‌دست آورده‌اند.

صفدری: من هم مشابه آقای دکتر نصیری، تنها به بررسی معادلاتی مشغول هستم که دیگران به‌دست آورده‌اند. گروهی از معادلات چند متغیره را انتخاب کرده‌ام که به آن‌ها معادلات **مرزآزاد** می‌گویند و کار من، بررسی جواب این معادلات است. این کار همان‌طور که گفته شد کاملاً ریاضی است، اما چون با معادلات پیچیده‌ای سروکار دارم و امکان توضیح ریاضی آن وجود ندارد، اجازه بدهید با یک مثال واقعی برای شما بگویم که این معادلات از کجا آمده است. فرض کنید یک استخر آب داریم که بخشی از آب آن یخ زده است و ما می‌خواهیم در هر لحظه دمای نقاط مختلف آب را بدانیم. جاهایی که آب و یخ در کنار هم قرار گرفته‌اند، دما صفر است. از این مرز آب و یخ که دور می‌شویم، دما تغییر می‌کند. می‌شود معادله‌ای نوشت که دمای آب را در فاصله‌های مختلف از یخ نشان دهد. اما یک اتفاق فیزیکی را باید درنظر بگیریم. لحظه به لحظه قسمت‌هایی از یخ آب می‌شود و قسمت‌هایی از آب یخ می‌زند. یعنی مرز آب و یخ که تنها جایی است که دمای آن مقداری ثابت و مشخص صفر است، تغییر می‌کند. به چنین مسئله‌ای که مرز ناحیه‌اش هم در حال تغییر است مسئلهٔ مرزآزاد می‌گوییم.

نصیری: در این مسئله انگار دو نوع متغیرِ متفاوت دارید. یکی مرزی است که دما روی آن ثابت و صفر است و هر لحظه تغییر می‌کند، و دیگری دمای نقاط مختلف آب است که به فاصله از این مرز وابسته است.

صفدری: بله. جواب معادلات ما دو بخش است. یکی معادلهٔ این مرز در هر لحظه و دیگری دمای هر نقطه از آب در هر لحظه. در اینجا ما هم خودِ جواب و هم ویژگی‌های جواب را جست‌وجو می‌کنیم. مثلاً اگر در ابتدا مرز آب و یخ، یک منحنی نَرم و بدون تیزی باشد، آیا با گذشت زمان و پس از تغییر شکل، ممکن است تیزی و شکستگی پیدا کند یا نه؟ یا یک ویژگی دیگر جواب این است که آیا نقاط نزدیک به هم دمای نزدیک به هم دارند؟ آیا ممکن است در بعضی نقاط نزدیک به هم، دماها خیلی باهم متفاوت باشد؟

برهان: یعنی شما از قوانین فیزیکیِ مربوط به انجماد و توزیع دما استفاده می‌کنید تا آیندهٔ این استخرِ آب و یخ را پیش‌بینی کنید؟

صفدری: درست است اما گاهی وقت‌ها ممکن است نتوانیم آینده را پیش‌بینی کنیم، ولی می‌توانیم ویژگی‌هایی از وضعیت آینده را بفهمیم.

● دکتر محمد صفدری:

متولد سال ۶۳، کارشناسی و ارشد خود را در رشته ریاضی از دانشگاه شریف در سال‌های ۸۶ و ۸۸ گرفته است. دکتری خود را سال ۹۳ از دانشگاه برکلی در حوزه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای اخذ کرده است. هم‌اکنون عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف است.

● دکتر میثم نصیری:

متولد سال ۵۷، کارشناسی و ارشد و دکتری خود را در رشته ریاضی به ترتیب از دانشگاه‌های امیر کبیر، شریف و ایمپا در سال‌های ۷۸، ۸۰ و ۸۵ گرفته است. هم‌اکنون عضو هیئت علمی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی است.

پی‌نوشت‌ها:

۱. پوانکاره: ریاضی‌دان فرانسوی قرن ۱۸ میلادی که از بنیان‌گذاران شاخهٔ توپولوژی در ریاضیات است.

۲. اویلر: ریاضی‌دان قرن هجدهم میلادی.

3. Navier–Stokes